BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 1 **(4 points)**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$. On note f' sa fonction dérivée.
On a alors :

a) $f'(x) = 0$ **b)** $f'(x) = \ln(x)$ **c)** $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ **d)** $f'(x) = \frac{1}{x} - x$

2) Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6 \times 0{,}95^n - 1 \leq 2$ appartiennent à l'intervalle :

a) $\left]-\infty\,;\frac{\ln 3}{\ln(5{,}7)}\right]$ **b)** $\left]-\infty\,;\ln\left(\frac{0{,}5}{0{,}95}\right)\right]$ **c)** $\left]-\infty\,;\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}\right]$ **d)** $\left[\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}\,;+\infty\right[$

3) Une entreprise fabrique des tubes métalliques de longueur 2 m.
Un tube métallique est considéré comme étant dans la norme si sa longueur est comprise entre 1,98 m et 2,02 m. On prélève au hasard un échantillon de 1000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme. L'intervalle de confiance de la fréquence des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à 10^{-3}, est :

a) $[0{,}922\,;\ 0{,}986]$ **b)** $[0{,}947\,;0{,}961]$ **c)** $[1{,}98\,;2{,}02]$ **d)** $[0{,}953;0{,}955]$

4) Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de 0,8. Les tirs sont supposés indépendants. Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

a) 0,512 **b)** 2,4 **c)** 0,262144 **d)** 0,08192

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016. Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.
Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre 2016 + n, on a donc $u_0 = 27\,500$.

1) a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.
b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 156$.

3) Recopier et compléter les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	n prend la valeur 0
L4		U prend la valeur 27 500
L5		Tant que $U \leq$ .... faire
L6		n prend la valeur ....
L7		U prend la valeur ....
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher ......

4) a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	.....
Valeur de n	0	.....	
Valeur de U	27 500	.....	

b) Donner la valeur affichée en sortie de cet algorithme.

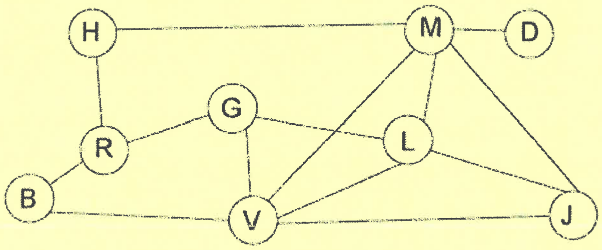
5) On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 23\,600 \times 1{,}04^n + 3\,900$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés.
Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :



B : Le lagon bleu.
D : Chute d'eau de Dettifoss.
G : Geyser de Geysir.
H : Rocher Hvítserkur.
J : Lagune glacière de Jökulsárlón.
L : Massif du Landmannalaugar.
M : Lac de Mývatn.
R : Capitale Reykjavik.
V : Ville de Vík.

1) Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.

a) Déterminer l'ordre du graphe.
b) Déterminer si le graphe est connexe.
c) Déterminer si le graphe est complet.

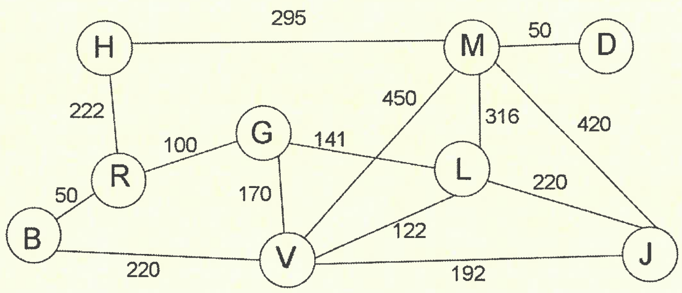
2) Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.

3) On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M^4 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 & 8 & 14 & 13 & 15 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 9 & 11 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 5 & 24 & 11 & 23 & 21 & 26 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 9 & 23 & 13 & 28 & 29 & 29 & 8 & 30 \\ 13 & 11 & 21 & 14 & 29 & 38 & 32 & 15 & 40 \\ 15 & 6 & 26 & 9 & 29 & 32 & 43 & 14 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & 15 & 14 & 15 & 21 \\ 10 & 12 & 20 & 14 & 30 & 40 & 34 & 21 & 49 \end{pmatrix}$$

a) Il manque certains coefficients de la matrice M. Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.
b) Donner, en le justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D.

4) Sur le graphe pondéré ci-dessous, on a indiqué sur les arêtes les distances en kilomètre entre les différents lieux :



Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra la distance minimale permettant d'aller du sommet B (Lagon bleu) au sommet D (Chute d'eau de Dettifoss).
Préciser alors le trajet à emprunter.

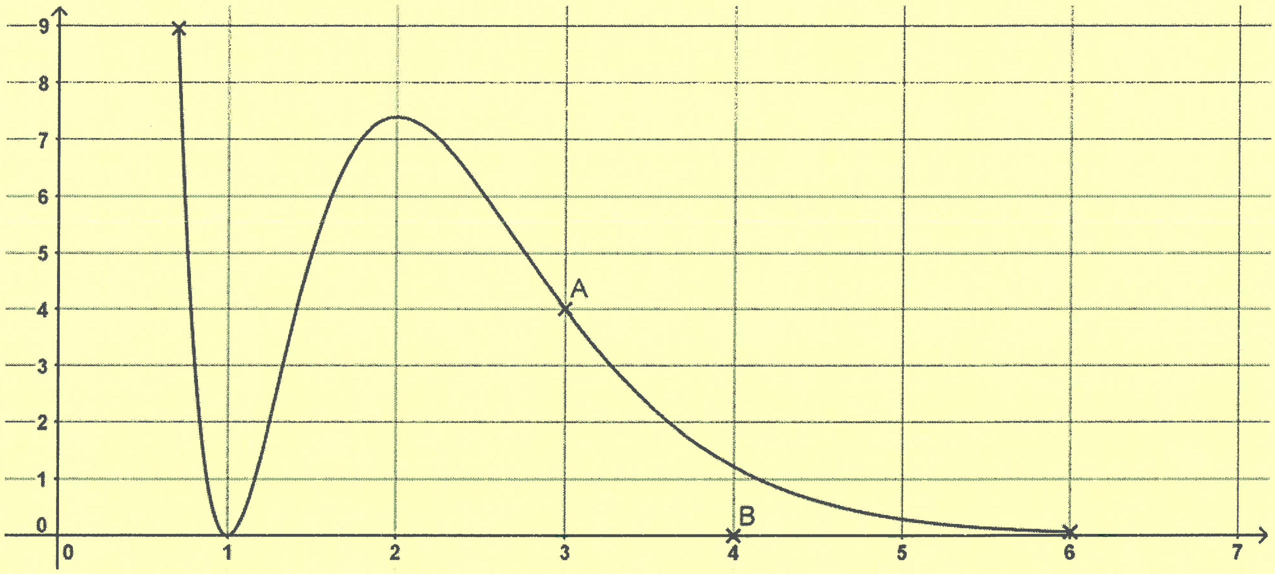
EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,7 ; 6]$; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : ***Étude graphique***

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1) La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points $A(3 ; 4)$ et $B(4 ; 0)$. Déterminer $f'(3)$.

2) D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0,7 ; 6]$.

PARTIE B : ***Étude théorique***

On admet que la fonction f est définie par $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-2x+6}$.

1) Montrer que $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,7 ; 6]$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,7 ; 6]$. On ne demande pas de calculer les ordonnées.

3) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

L1	$f'(x) := (-2x\hat{}2 + 6x - 4) * e\hat{}(-2x + 6)$ $\rightarrow f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$
L2	$g(x) :=$ Dérivée$[f'(x)]$ $\rightarrow g(x) = -16xe^{-2x+6} + 4x^2e^{-2x+6} + 14e^{-2x+6}$
L3	Factoriser$[g(x)]$ $\rightarrow 2e^{-2x+6}(2x^2 - 8x + 7)$
L4	Résoudre$[g(x) = 0]$ $\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L5	$F(x) :=$ Primitive$[f(x)]$ $\rightarrow F(x) = \frac{1}{4}(-2x^2 + 2x - 1)e^{-2x+6}$

a) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.

b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, en donner l'abscisse.

c) On pose $I = \int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1} .